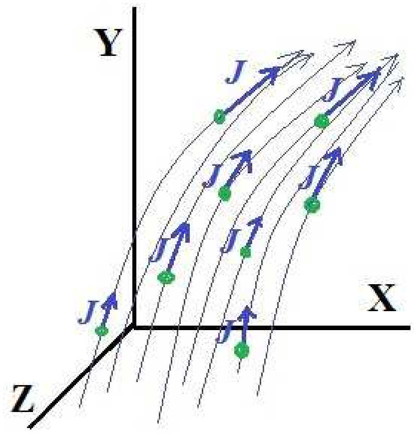
V-49 (1 h , 1min) 15-Enero 2019 Resumen de Miguel Cañizares	**Deducción de Ecuación de Continuidad** (en Electromagnetismo) **Cuadrivector densidad de corriente**

Deducción de ecuación de continuidad en Electromagnetismo, aunque tendrá su generalización a otros ámbitos

Sea un espacio 3D donde se mueven cargas eléctricas. Definimos el **vector <u>Densidad de Corriente $\vec{J}$ en un punto</u>** como la <u>carga que atraviesa la unidad de superficie en la unidad de tiempo</u>. Es un vector con la <u>misma dirección y sentido que la velocidad</u> de las cargas en ese punto:



$$\vec{J} = \frac{dQ}{dA \cdot dt} \cdot \frac{\vec{v}}{v} = \frac{dQ}{dA \cdot dt} \cdot \frac{\vec{v}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{dQ}{dA \cdot ds} \cdot \vec{v} \quad \to \quad \boldsymbol{\vec{J} = \rho \cdot \vec{v}} \qquad \text{(I)}$$

Siendo $\rho = \frac{dQ}{dA \cdot ds}$ la densidad de carga en cada punto y $\vec{v}$ la velocidad de éstas en cada punto.

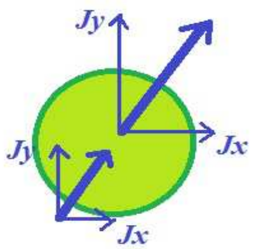
Se establece un campo vectorial, en el que en cada punto hay un vector $\vec{J}$

<u>La Divergencia, en un punto, del campo vectorial</u>:

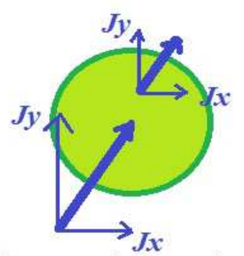
$$\boldsymbol{div\,\vec{J} = \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z} = N^{o} escalar} \qquad \text{(II)}$$

En cada punto (volumen infinitesimal) la divergencia nos indica el flujo neto del vector que sale de dicho volumen infinitesimal.

En la figura “hacemos zoom” en punto infinitesimal (situación 2D) y observamos el significado de la divergencia. Se comprende intuitivamente que se obtenga mediante las derivadas parciales de las componentes del vector, en el punto considerado. Fácilmente se generaliza a situación 3D



Divergencia positiva
(sale más que entra)



Divergencia negativa
(sale menos que entra)

<u>Deducción de la Ecuación de Continuidad</u>. A partir de los conceptos anteriores es fácil establecer la expresión matemática de la conservación de la carga eléctrica. Consideremos un punto (volumen infinitesimal), la variación de su densidad de carga con el tiempo *dρ/dt* lógicamente tiene que estar relacionada con la divergencia en dicho punto. En efecto, derivamos (I) respecto al tiempo (considerando $\vec{v}$ una constante en el punto elegido):

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{v} \cdot \frac{d\rho}{dt} \quad \to \quad \frac{dJ_x}{dt}\vec{i} + \frac{dJ_y}{dt}\vec{j} + \frac{dJ_z}{dt}\vec{k} = \vec{v} \cdot \frac{d\rho}{dt}$$ Aplicamos regla de cadena: $$\frac{dJ_x}{dx}\frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dJ_y}{dy}\frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dJ_z}{dz}\frac{dz}{dt}\vec{k} = \vec{v} \cdot \frac{d\rho}{dt}$$

Aparecen las componentes de la velocidad y podemos poner la expresión como: $\left(\frac{dJ_x}{dx} + \frac{dJ_y}{dy} + \frac{dJ_z}{dz}\right)\vec{v} = \vec{v} \cdot \frac{d\rho}{dt}$

Eliminando la velocidad vemos, según la expresión **(II)**, que la divergencia en el punto es igual a la derivada de la densidad de carga en ese punto. Por lógica le pondremos un signo negativo, pues cuando la divergencia sea positiva saldrá más carga que entra y disminuirá la densidad de carga en el punto en cuestión Por lo tanto, <u>la ecuación de continuidad</u> se escribe:

$$\boldsymbol{\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{d\rho}{dt} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{d\rho}{dt} + \frac{dJ_x}{dx} + \frac{dJ_y}{dy} + \frac{dJ_z}{dz} = 0}$$

La ecuación anterior (puesta con cuatro derivadas) parece <u>sugerir una expresión relativista</u>, en la que se deriva una magnitud de cuatro dimensiones (cuadrivector), respecto a las cuatro coordenadas *(ct, x, y, z*).

Introducimos “c” y la ponemos: $\frac{1}{c}\frac{d(c\rho)}{dt} + \frac{dJ_x}{dx} + \frac{dJ_y}{dy} + \frac{dJ_z}{dz} = 0$ pues $\frac{d(c\rho)}{d(ct)} = \frac{1}{c}\frac{d(c\rho)}{dt}$

La componente, que se deriva respecto a la coordenada asociada al tiempo (*ct*), aquí tiene que ver con la densidad de carga y sería $J^0 = c\rho$

Según la sugerencia anterior, <u>nos atrevemos a postular el</u> **<u>Cudrivector Densidad de Corriente:</u>**

$$\boldsymbol{\underline{J} = J^0 e_0 + J^1 e_1 + J^2 e_2 + J^3 e_3} \quad siendo \quad \boldsymbol{J^0 = \rho c} \quad \boldsymbol{J^k = \rho v^k}$$

Utilizando la nomenclatura típica relativista para las coordenadas ($\boldsymbol{ct \equiv x^0}$, $\boldsymbol{x \equiv x^1}$, $\boldsymbol{y \equiv x^2}$, $\boldsymbol{z \equiv x^3}$) y, según la ecuación de continuidad, ese cuadrivector debe cumplir la **<u>conservación local de la densidad de carga ρ</u>**:

$$\boldsymbol{\partial_0(\rho c) + \partial_1(\rho v^1) + \partial_2(\rho v^2) + \partial_3(\rho v^3) = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_\mu J^\mu = 0}$$

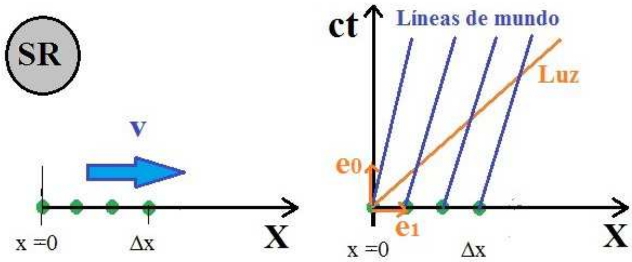
Para que se pueda considerar, con todo derecho, un cuadrivector (<u>tensor de rango 1</u>) debe comportarse adecuadamente cuando hay un **<u>cambio coordenadas (cambio de SR)</u>** :

Para realizar una justificación (no demostración rigurosa) suponemos un conjunto de cargas que se mueven unidimensionalmente (para simplificar) a lo largo del eje X con velocidad v

Desde un SR inercial vemos a las cargas moviéndose. En la figura adjunta se representa desde el SR espacial (eje X) y las líneas de mundo en una gráfica de Minkowski con base (e_o, e_1).

Un observador dice que el cuadrivector densidad de corriente es:

$$\underline{J} = \rho c\, e_0 + \rho v\, e_1$$



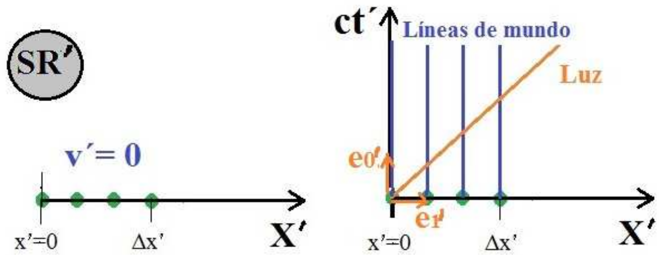
Siendo $\rho = Q/\Delta x$ la densidad lineal de carga medida desde SR en que se mueven las cargas y la longitud Δx.

Ahora hacemos un cambio de sistema a otro SR´inercial que se mueve paralelamente con las cargas.

Desde el SR´ inercial vemos a las cargas en reposo (Rest-Frame). En la figura se ve la representación desde el SR´ espacial (eje X´) y las líneas de mundo en una gráfica de Minkowski con base "primada" ($e_{0'}$, $e_{1'}$).

Un observador dice que el cuadrivector densidad de corriente es:

$$\underline{J} = \rho_0 c\, e_{0'}$$



Siendo $\rho_0 = Q/\Delta x$` la densidad lineal de cargas medida desde SR', en que están en reposo, así como la longitud $\Delta x$`.

Comprobemos cómo se comporte el "aspirante" a cuadrivector $\underline{J}$ cuando cambiamos el SR y su base. Utilizamos una de las ecuaciones de cambio de base (v-18): $\boldsymbol{e_{0'}} = \gamma(\boldsymbol{e_0} + \beta \boldsymbol{e_1})$:

Al pasar del SR´al SR se transforma: $\underline{J} = \rho_0 c\, e_{0'} = \rho_0 c \gamma(\boldsymbol{e_0} + \beta \boldsymbol{e_1}) = \gamma \rho_0\, c\, \boldsymbol{e_0} + \gamma \rho_0\, \boldsymbol{v}\, \boldsymbol{e_1}$ pues $c{\cdot}\beta = v$

La expresión que vimos, desde el SR, inicialmente: $\underline{J} = \rho c\, e_0 + \rho v\, e_1$

Comparando vemos que para que la densidad de corriente $\underline{J}$ se comporte como tensor, tiene que cumplirse: $\boldsymbol{\rho = \gamma{\cdot}\rho_0}$

¿Tiene sentido esa relación entre la densidad lineal ρ_0 (medida por observador que ve las cargas en reposo) y la densidad lineal ρ (medida por observador que las ve en movimiento)?

La respuesta es afirmativa, ya que debido a la contracción de longitudes de Lorentz-Fitzgerald ha de cumplirse: $\Delta x' = \gamma{\cdot}\Delta x$. Por lo tanto:

$$\rho_0 = \frac{Q}{\Delta x'} = \frac{Q}{\gamma \cdot \Delta x} = \frac{\rho}{\gamma} \quad \rightarrow \quad \rho = \gamma \cdot \rho_0$$

Es lógico que la contracción de longitud en movimiento, haga que la densidad lineal ρ sea mayor que en reposo ρ_0

Hemos justificado que **<u>se puede construir un cuadrivector</u>** (en este caso de densidad de corriente):

$$\boldsymbol{\underline{J} = \rho c\, e_0 + \rho v^1 e_1 + \rho v^2 e_2 + \rho v^3 e_3}$$

que cumple $\boldsymbol{\partial_\mu J^\mu = 0}$ → **<u>Conservación Local de una magnitud ρ</u>** (en este caso densidad local de la carga)